

# LU02a - Normalverteilung

**Ziel:** Du kannst erklären, was eine Normalverteilung ist, die 68-95-99.7-Regel anwenden und Datenwerte mithilfe des **z-Scores standardisieren**.

---

## Kurztheorie (Merksätze)

- **Normalverteilung:** Daten häufen sich um einen zentralen Wert und nehmen nach beiden Seiten gleichmässig ab → Glockenform.
  - **Mittelwert = Median = Modus** (alle drei fallen zusammen).
  - **68 %** aller Werte liegen innerhalb von **1 Standardabweichung** vom Mittelwert.
  - **95 %** aller Werte liegen innerhalb von **2 Standardabweichungen** vom Mittelwert.
  - **99.7 %** aller Werte liegen innerhalb von **3 Standardabweichungen** vom Mittelwert.
  - Der **z-Score** gibt an, wie viele Standardabweichungen ein Wert vom Mittelwert entfernt ist.
- 

## 1) Was ist eine Normalverteilung?

Daten können auf verschiedene Arten verteilt sein – sie können nach links oder rechts verzerrt sein, oder chaotisch durcheinander liegen. In vielen realen Situationen tendieren Messwerte jedoch dazu, sich um einen **zentralen Wert** zu gruppieren, ohne eine Tendenz nach links oder rechts zu zeigen. Diese Form nennt man **Normalverteilung**.

Sie sieht aus wie eine **Glocke** und wird deshalb oft auch **Glockenkurve** genannt.

### 1.1 Eigenschaften der Normalverteilung

Eine Normalverteilung hat folgende Eigenschaften:

- **Mittelwert = Median = Modus** – alle drei Lagemaße fallen auf denselben Punkt.
- Die Kurve ist **symmetrisch** um den Mittelpunkt.
- **50 %** der Werte liegen unterhalb des Mittelwerts, **50 %** darüber.

### 1.2 Beispiele aus der Praxis

Viele reale Phänomene folgen näherungsweise einer Normalverteilung:

- Körpergrößen von Menschen
- Abmessungen von Industrieprodukten
- Messfehler
- Blutdruck
- Testergebnisse

**Wichtig:** Die meisten Daten sind nicht *perfekt* normalverteilt, aber die Normalverteilung hilft uns trotzdem, sie zu verstehen und Aussagen darüber zu machen.

## 2) Standardabweichungen und die 68-95-99.7-Regel

Die **Standardabweichung**  $(\sigma)$  (Sigma) ist ein Mass dafür, wie stark die Werte um den Mittelwert streuen.

Bei einer Normalverteilung gilt näherungsweise:

Bereich	Anteil der Werte
Mittelwert $\pm$ 1 Standardabweichung	<b>68 %</b>
Mittelwert $\pm$ 2 Standardabweichungen	<b>95 %</b>
Mittelwert $\pm$ 3 Standardabweichungen	<b>99.7 %</b>

Diese Regel ist so wichtig, dass sie einen eigenen Namen hat: die **68-95-99.7-Regel** (oder Empirische Regel).

### Beispiel: Körpergrössen in einer Schulklasse

In einer Schule sind **95 % der Schülerinnen und Schüler zwischen 1.1 m und 1.7 m gross.**

Angenommen, die Daten sind normalverteilt – wie gross sind Mittelwert und Standardabweichung?

**Mittelwert:** Der Mittelwert liegt in der Mitte:

$$\mu = \frac{1.1 + 1.7}{2} = 1.4 \text{ m}$$

**Standardabweichung:** 95 % entsprechen  $\pm 2$  Standardabweichungen (also insgesamt 4 Standardabweichungen):

$$\sigma = \frac{1.7 - 1.1}{4} = \frac{0.6}{4} = 0.15 \text{ m}$$

Ein Wert von 1.7 m liegt also genau **2 Standardabweichungen** über dem Mittelwert von 1.4 m.

#### Faustregel:

Ein Wert innerhalb von  $1\sigma$  ist **wahrscheinlich** (68 von 100).

Ein Wert innerhalb von  $2\sigma$  ist **sehr wahrscheinlich** (95 von 100).

Ein Wert innerhalb von  $3\sigma$  ist **fast sicher** (997 von 1000).

### 3) Standardisierung und der z-Score

Die Anzahl Standardabweichungen, die ein Wert vom Mittelwert entfernt ist, heisst **z-Score** (oder Standardwert).

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Dabei gilt:

- $z$  = z-Score (Standardwert)
- $x$  = der zu standardisierende Wert
- $\mu$  (Mu) = Mittelwert der Verteilung
- $\sigma$  (Sigma) = Standardabweichung

#### 3.1 Vorgehen: Wert standardisieren

1. Mittelwert subtrahieren:  $(x - \mu)$
2. Durch die Standardabweichung dividieren:  $(\div \sigma)$

#### 3.2 Beispiel: Reisezeit

Eine Umfrage über tägliche Reisezeiten (in Minuten) ergab:

26, 33, 65, 28, 34, 55, 25, 44, 50, 36, 26, 37, 43, 62, 35, 38, 45, 32, 28, 34

**Mittelwert:**  $\mu = 38.8$  Minuten

**Standardabweichung:**  $\sigma = 11.4$  Minuten

Die ersten drei Werte werden wie folgt standardisiert:

Originalwert $x$	Berechnung	z-Score
26	$\frac{26 - 38.8}{11.4}$	<b>-1.12</b>
33	$\frac{33 - 38.8}{11.4}$	<b>-0.51</b>
65	$\frac{65 - 38.8}{11.4}$	<b>+2.30</b>

Ein z-Score von  $-1.12$  bedeutet: Der Wert 26 liegt **1.12 Standardabweichungen unterhalb** des Mittelwerts.

#### 3.3 Wozu dient die Standardisierung?

Durch die Standardisierung können wir **beliebige Normalverteilungen** in die **Standardnormalverteilung** umrechnen (Mittelwert = 0, Standardabweichung = 1). Das erlaubt uns:

- Werte aus verschiedenen Verteilungen direkt zu **vergleichen**.
- Mit einer einzigen **Standardnormaltabelle** Wahrscheinlichkeiten abzulesen, anstatt für jede Verteilung neu zu rechnen.

### 3.4 Beispiel: Testergebnisse fair beurteilen

Ein Lehrer bewertet einen Test (maximale Punktzahl: 60):

20, 15, 26, 32, 18, 28, 35, 14, 26, 22, 17

Die meisten Schülerinnen und Schüler haben weniger als 30 Punkte – der Test war offensichtlich sehr schwer. Der Lehrer entscheidet, die Noten zu standardisieren und nur Personen mit einem z-Score unter  $-1$  als ungenügend zu bewerten.

- Mittelwert:  $\mu = 23$
- Standardabweichung:  $\sigma = 6.6$
- z-Scores:  $-0.45, -1.21, 0.45, 1.36, -0.76, 0.76, 1.82, -1.36, 0.45, -0.15, -0.91$

Resultat: Nur **2 Schülerinnen/Schüler** fallen unter  $-1$  und gelten als ungenügend – deutlich fairer!

## 4) Verteilung in Prozentzonen

Die Standardnormalverteilung lässt sich in Prozentzonen aufteilen, jeweils in Schritten von  $0.5$  Standardabweichungen:

Zone	Anteil in diesem Bereich	Kumulierter Anteil (von links)
unter $-3\sigma$	0.1 %	0.1 %
$-3\sigma$ bis $-2.5\sigma$	0.5 %	0.6 %
$-2\sigma$ bis $-1.5\sigma$	6.1 %	ca. 6.7 %
$-1\sigma$ bis $-0.5\sigma$	15.0 %	ca. 30.9 %
$-0.5\sigma$ bis $0$	19.1 %	ca. 50.0 %
$0$ bis $+0.5\sigma$	19.1 %	ca. 69.1 %
$+0.5\sigma$ bis $+1\sigma$	15.0 %	ca. 84.1 %
$+1\sigma$ bis $+1.5\sigma$	9.2 %	ca. 93.3 %
$+2\sigma$ bis $+2.5\sigma$	3.8 %	ca. 98.8 %
über $+3\sigma$	0.1 %	99.9 %

### Beispiel: Wie gut war dein Testergebnis?

Dein Ergebnis liegt **0.5 Standardabweichungen über dem Durchschnitt** ( $z = +0.5$ ). Wie viele Personen haben schlechter abgeschnitten?

- Anteil zwischen  $0$  und  $+0.5$ : **19.1 %**
- Anteil unter  $0$  (linke Hälfte): **50.0 %**
- Total: **69.1 %** haben schlechter abgeschnitten als du.

## 5) Praxisbeispiel: Zuckerbeutel abfüllen

Eine Maschine füllt Zuckerbeutel ab. Eine Stichprobe ergibt:

- Mittelwert:  $\mu = 1010$  g
- Standardabweichung:  $\sigma = 20$  g

**Problem:** Etwa 31 % der Beutel enthalten weniger als 1000 g – das ist zu viel!

**Lösung:** Wir wollen, dass 1000 g bei  $-2.5$  Standardabweichungen liegt (nur 0.6 % zu wenig).

**Option A - Mittelwert erhöhen:**

$$\mu_{\text{Neuer Mittelwert}} = 1000 + 2.5 \times 20 = 1000 + 50 = 1050 \text{ g}$$

**Option B - Streuung verringern:**

$$\sigma_{\text{neu}} = \frac{10}{2.5} = 4 \text{ g}$$

Bei einer Standardabweichung von nur 4 g würden weniger als 0.6 % der Beutel das Gewichtslimit unterschreiten.

**Fazit:** Mit der Normalverteilung können wir Produktionsprozesse gezielt steuern – entweder durch Anpassen des Mittelwerts oder durch Verringern der Streuung.

## Verständnisfragen

1. Nenne **drei reale Phänomene**, die näherungsweise normalverteilt sind.
2. Ein Datensatz hat  $\mu = 50$  und  $\sigma = 10$ . Welcher Anteil der Werte liegt zwischen 30 und 70?
3. Berechne den z-Score für einen Wert von  $x = 75$ , wenn  $\mu = 60$  und  $\sigma = 8$ .
4. Was bedeutet ein z-Score von **-2.5** anschaulich?
5. Warum ist die Standardisierung nützlich, wenn man Werte aus verschiedenen Verteilungen vergleichen will?



Kevin Maurizi / Bearbeitet nach [mathsisfun.com](https://mathsisfun.com)

From:

<https://wiki.bzz.ch/> - BZZ - Modulwiki

Permanent link:

<https://wiki.bzz.ch/modul/mathe/ma4/thema/wahrscheinlichkeit/normalverteilung?rev=1776062184>

Last update: 2026/04/13 08:36

