

# LU02b - Standardabweichung und die 68-95-99.7-Regel

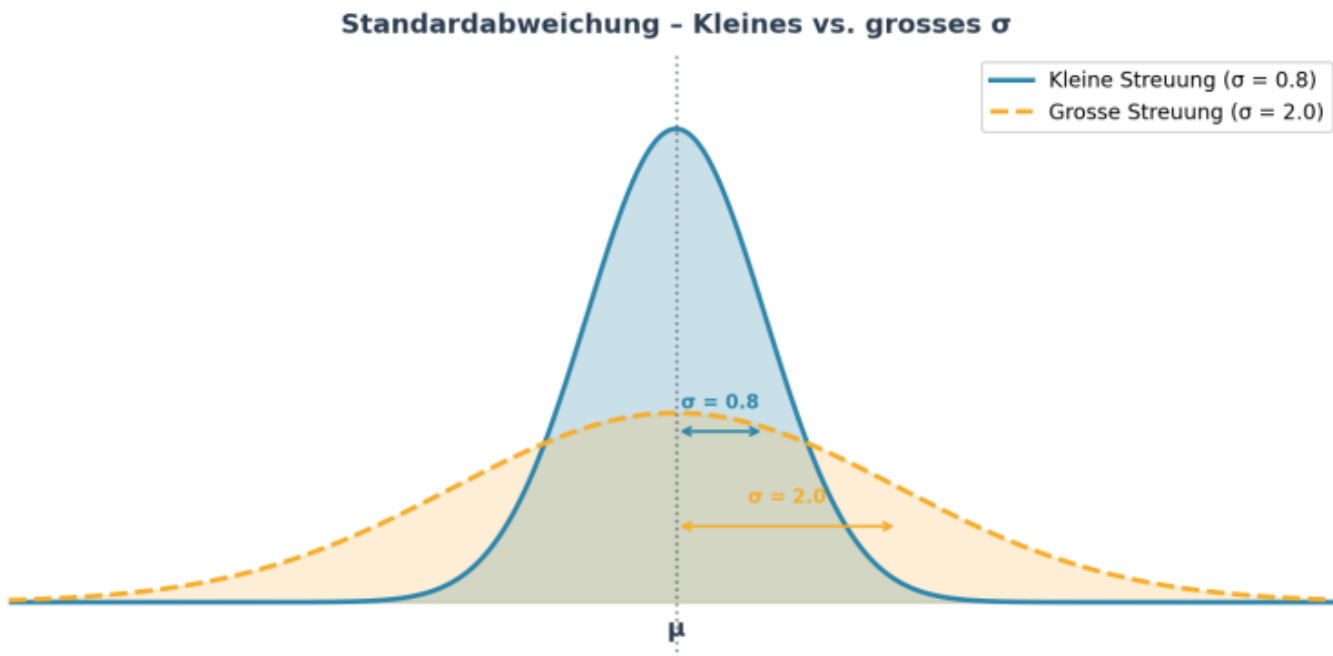
**Ziel:** Du kannst die Standardabweichung als Streuungsmass erklären, die 68-95-99.7-Regel anwenden und Werte mithilfe des **z-Scores** **standardisieren**.

## Kurztheorie (Merksätze)

- **$\sigma$  (Sigma)** = Standardabweichung → misst, wie stark Werte um den Mittelwert streuen.
- **68 %** aller Werte liegen innerhalb von  **$\pm 1\sigma$**  vom Mittelwert.
- **95 %** aller Werte liegen innerhalb von  **$\pm 2\sigma$**  vom Mittelwert.
- **99.7 %** aller Werte liegen innerhalb von  **$\pm 3\sigma$**  vom Mittelwert.

## 1) Was ist die Standardabweichung?

Die **Standardabweichung  $\sigma$**  (Sigma) misst, wie stark die Werte eines Datensatzes um den **Mittelwert  $\mu$**  herum streuen.



Sigma	Bedeutung	Kurvenform
<b>Kleines <math>\sigma</math></b>	Werte liegen eng beieinander	Schmale, hohe Glocke
<b>Grosses <math>\sigma</math></b>	Werte sind weit gestreut	Breite, flache Glocke

**Merksatz:** Ein kleines  $\sigma$  bedeutet **Präzision** (z.B. eine gut kalibrierte Maschine). Ein grosses  $\sigma$  bedeutet **grosse Streuung** (z.B. unterschiedliche Testergebnisse in einer heterogenen Klasse).

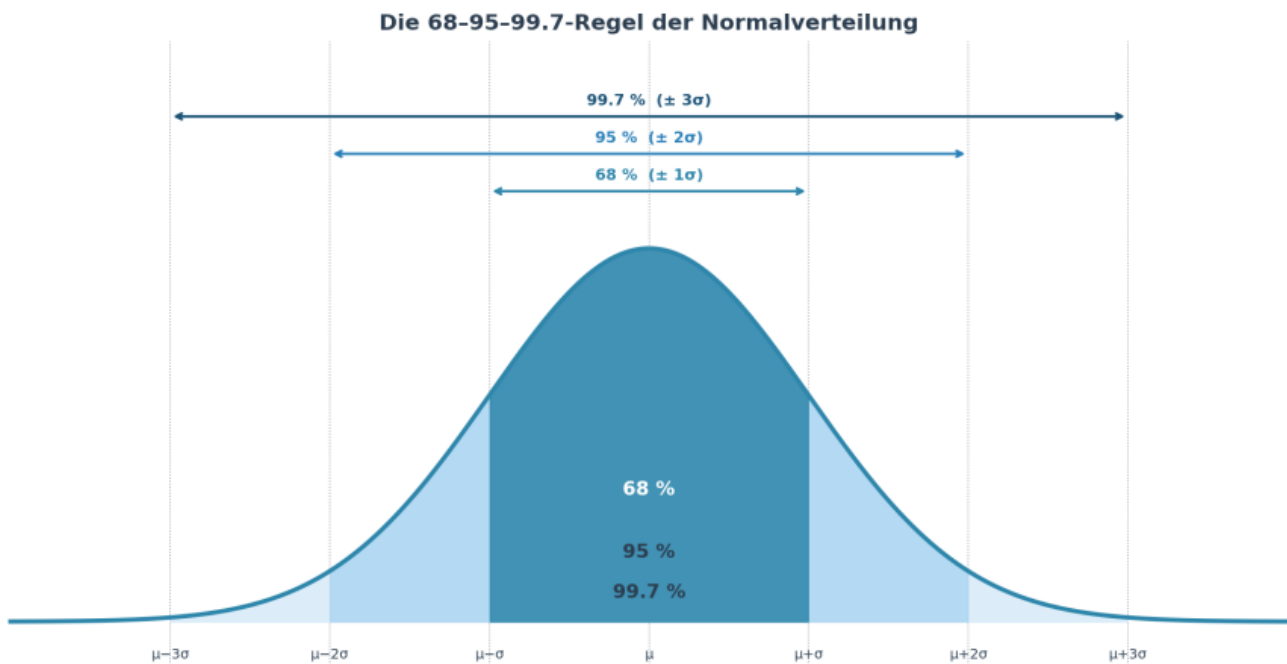
Die Formel für die Standardabweichung lautet:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

**Hinweis:** In der Praxis verwenden wir oft einen Taschenrechner oder Software (Excel, Python) für die Berechnung.

## 2) Die 68-95-99.7-Regel

Bei einer normalverteilten Datenmenge gilt immer folgende **Faustregel**:



Bereich	Anteil der Werte	Bedeutung
$\mu \pm 1\sigma$	<b>68 %</b>	Wahrscheinlich – 68 von 100 Werten fallen hier rein
$\mu \pm 2\sigma$	<b>95 %</b>	Sehr wahrscheinlich – 95 von 100
$\mu \pm 3\sigma$	<b>99.7 %</b>	Fast sicher – 997 von 1000

Diese Regel wird auch **Empirische Regel** genannt und ist eines der wichtigsten Werkzeuge der Statistik.

### 2.1 Anwendungsbeispiel: Körpergrößen

In einer Schule sind **95 % der Schülerinnen und Schüler zwischen 1.1 m und 1.7 m gross.**

Angenommen, die Daten sind normalverteilt – gesucht: Mittelwert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$ .

**Schritt 1 - Mittelwert berechnen:**  $\mu = \frac{1.1 + 1.7}{2} = 1.4 \text{ m}$

**Schritt 2 - Standardabweichung berechnen:**

95 % entsprechen  $\pm 2\sigma$  → der Gesamtbereich von 1.1 bis 1.7 m umfasst  $4\sigma$ :  $\left[ \sigma = \frac{1.7 - 1.1}{4} = \frac{0.6}{4} = 0.15 \text{ m} \right]$

### Kontrolle:

- $1\sigma$ -Bereich: 1.25 m – 1.55 m → ca. **68 %** der Schüler
- $2\sigma$ -Bereich: 1.10 m – 1.70 m → ca. **95 %** der Schüler ✓
- $3\sigma$ -Bereich: 0.95 m – 1.85 m → ca. **99.7 %** der Schüler

## 3) Der z-Score (Standardwert)

Der **z-Score** gibt an, wie viele Standardabweichungen ein bestimmter Wert  $(x)$  vom Mittelwert  $\mu$  entfernt ist.

$$\boxed{z = \frac{x - \mu}{\sigma}}$$

Dabei gilt:

Symbol	Bedeutung
$(z)$	z-Score (Standardwert)
$(x)$	der zu standardisierende Wert
$(\mu)$	Mittelwert der Verteilung
$(\sigma)$	Standardabweichung

### 3.1 Vorgehen

1. Mittelwert subtrahieren:  $(x - \mu)$
2. Durch Standardabweichung dividieren:  $(\div; \sigma)$

**Ergebnis:** Ein z-Score von **+2** bedeutet: der Wert liegt 2 Standardabweichungen **über** dem Mittelwert. Ein z-Score von **-1** bedeutet: 1 Standardabweichung **unter** dem Mittelwert.

### 3.2 Beispiel: Reisezeiten

Eine Umfrage über tägliche Reisezeiten (in Minuten) ergab:

26, 33, 65, 28, 34, 55, 25, 44, 50, 36, 26, 37, 43, 62, 35, 38, 45, 32, 28, 34

- Mittelwert:  $(\mu = 38.8)$  Minuten
- Standardabweichung:  $(\sigma = 11.4)$  Minuten

Die ersten drei Werte standardisiert:

Originalwert $(x)$	Berechnung	z-Score	Interpretation
26	$\left( \frac{26 - 38.8}{11.4} \right)$	<b>-1.12</b>	$1.12\sigma$ unter dem Mittelwert
33	$\left( \frac{33 - 38.8}{11.4} \right)$	<b>-0.51</b>	$0.51\sigma$ unter dem Mittelwert

Originalwert $(x)$	Berechnung	z-Score	Interpretation
65	$\frac{65 - 38.8}{11.4}$	<b>+2.30</b>	2.30 $\sigma$ über dem Mittelwert

### 3.3 Wozu dient der z-Score?

- **Vergleichbarkeit:** Werte aus verschiedenen Verteilungen können direkt verglichen werden.
- **Tabellen:** Mit einer einzigen Standardnormaltabelle lassen sich Wahrscheinlichkeiten für beliebige Normalverteilungen ablesen.
- **Ausreisser erkennen:** Werte mit  $|z| > 3$  gelten als statistisch ungewöhnlich.

### 3.4 Praxisbeispiel: Faire Benotung

Ein Lehrer bewertet einen Test (max. 60 Punkte):

20, 15, 26, 32, 18, 28, 35, 14, 26, 22, 17

Der Test war zu schwer - die meisten Schüler bestehen nicht. Der Lehrer standardisiert die Noten und erklärt alle z-Scores unter  $-1$  als „ungenügend“:

- $(\mu = 23), (\sigma = 6.6)$
- z-Scores:  $-0.45, -1.21, 0.45, 1.36, -0.76, 0.76, 1.82, -1.36, 0.45, -0.15, -0.91$

Nur **2 Schüler** (fett) gelten als ungenügend  $\rightarrow$  deutlich fairer!

## 4) Prozentzonen der Standardnormalverteilung

Die Standardnormalverteilung ( $\mu = 0, \sigma = 1$ ) lässt sich in Zonen aufteilen:

Zone	Anteil in diesem Bereich	Kumulierter Anteil (ab $-\infty$ )
unter $-3\sigma$	0.1 %	0.1 %
$-3\sigma$ bis $-2\sigma$	2.1 %	2.3 %
$-2\sigma$ bis $-1\sigma$	13.6 %	15.9 %
$-1\sigma$ bis 0	34.1 %	50.0 %
0 bis $+1\sigma$	34.1 %	84.1 %
$+1\sigma$ bis $+2\sigma$	13.6 %	97.7 %
$+2\sigma$ bis $+3\sigma$	2.1 %	99.7 %
über $+3\sigma$	0.1 %	99.9 %

### Lesbeispiel

Dein Testergebnis liegt **0.5 Standardabweichungen über dem Durchschnitt** ( $z = +0.5$ ). Wie viele Personen schnitten schlechter ab?

- Anteil unter dem Mittelwert ( $z < 0$ ): **50 %**

- Anteil zwischen 0 und  $+0.5\sigma$ : **19.1 %**
- Total: **69.1 %** schnitten schlechter ab als du.

## 5) Praxisbeispiel: Zuckerbeutel-Produktion

Eine Abfüllmaschine hat:  $\mu = 1010$  g,  $\sigma = 20$  g.

**Problem:** Etwa 31 % der Beutel enthalten weniger als 1000 g!

**Ziel:** 1000 g soll bei  $-2.5\sigma$  liegen (dann nur noch 0.6 % zu leichte Beutel).

**Option A - Mittelwert erhöhen:**  $\mu_{\text{neu}} = 1000 + 2.5 \times 20 = 1050$  g

**Option B - Streuung verringern:**  $\sigma_{\text{neu}} = \frac{10}{2.5} = 4$  g

**Fazit:** Mit der 68-95-99.7-Regel und dem z-Score können Produktionsprozesse **quantitativ gesteuert** werden - entweder durch Anpassen des Mittelwerts oder durch Verringern der Streuung.

## Verständnisfragen

1. Ein Datensatz hat  $\mu = 50$  und  $\sigma = 10$ . Welcher Anteil der Werte liegt zwischen **30 und 70**?
2. Berechne den z-Score für  $x = 75$ , wenn  $\mu = 60$  und  $\sigma = 8$ .
3. Was bedeutet ein z-Score von **-2.5** anschaulich?
4. Warum ist die Standardisierung nützlich, wenn man Werte aus **verschiedenen Verteilungen** vergleichen will?
5. Eine Maschine produziert Teile mit  $\mu = 100$  mm und  $\sigma = 2$  mm. Wie gross ist der Anteil der Teile, die **kürzer als 96 mm** sind?



Bearbeitet nach [mathsisfun.com](https://mathsisfun.com)

From:

<https://wiki.bzz.ch/> - **BZZ - Modulwiki**

Permanent link:

<https://wiki.bzz.ch/modul/mathe/ma4/thema/wahrscheinlichkeit/standardabweichung?rev=1776063015>

Last update: **2026/04/13 08:50**

