

LU02b - Standardabweichung und die 68-95-99.7-Regel

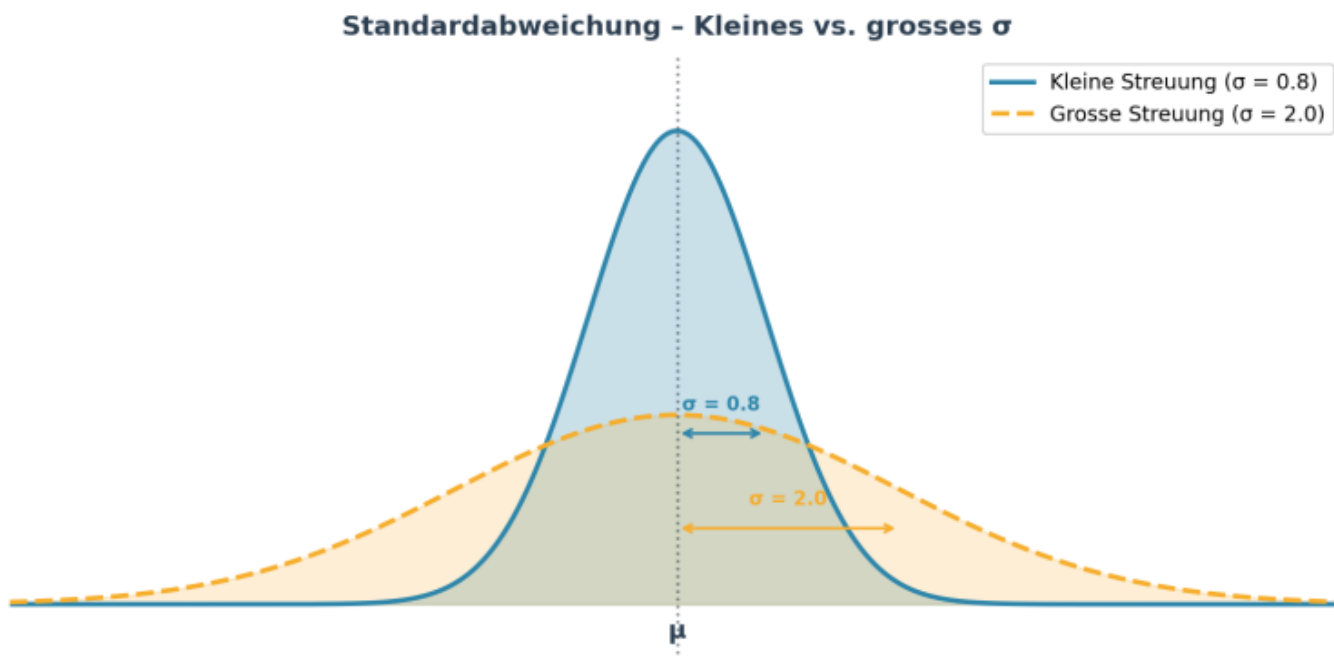
Ziel: Du kannst die Standardabweichung als Streuungsmass erklären, die 68-95-99.7-Regel anwenden und Werte mithilfe des **z-Scores** **standardisieren**.

Kurztheorie (Merksätze)

- **σ (Sigma)** = Standardabweichung → misst, wie stark Werte um den Mittelwert streuen.
- **68 %** aller Werte liegen innerhalb von **$\pm 1\sigma$** vom Mittelwert.
- **95 %** aller Werte liegen innerhalb von **$\pm 2\sigma$** vom Mittelwert.
- **99.7 %** aller Werte liegen innerhalb von **$\pm 3\sigma$** vom Mittelwert.

1) Was ist die Standardabweichung?

Die **Standardabweichung σ** (Sigma) misst, wie stark die Werte eines Datensatzes um den **Mittelwert μ** herum streuen.



Sigma	Bedeutung	Kurvenform
Kleines σ	Werte liegen eng beieinander	Schmale, hohe Glocke
Grosses σ	Werte sind weit gestreut	Breite, flache Glocke

Merksatz: Ein kleines σ bedeutet **Präzision** (z.B. eine gut kalibrierte Maschine). Ein grosses σ bedeutet **grosse Streuung** (z.B. unterschiedliche Testergebnisse in einer heterogenen Klasse).

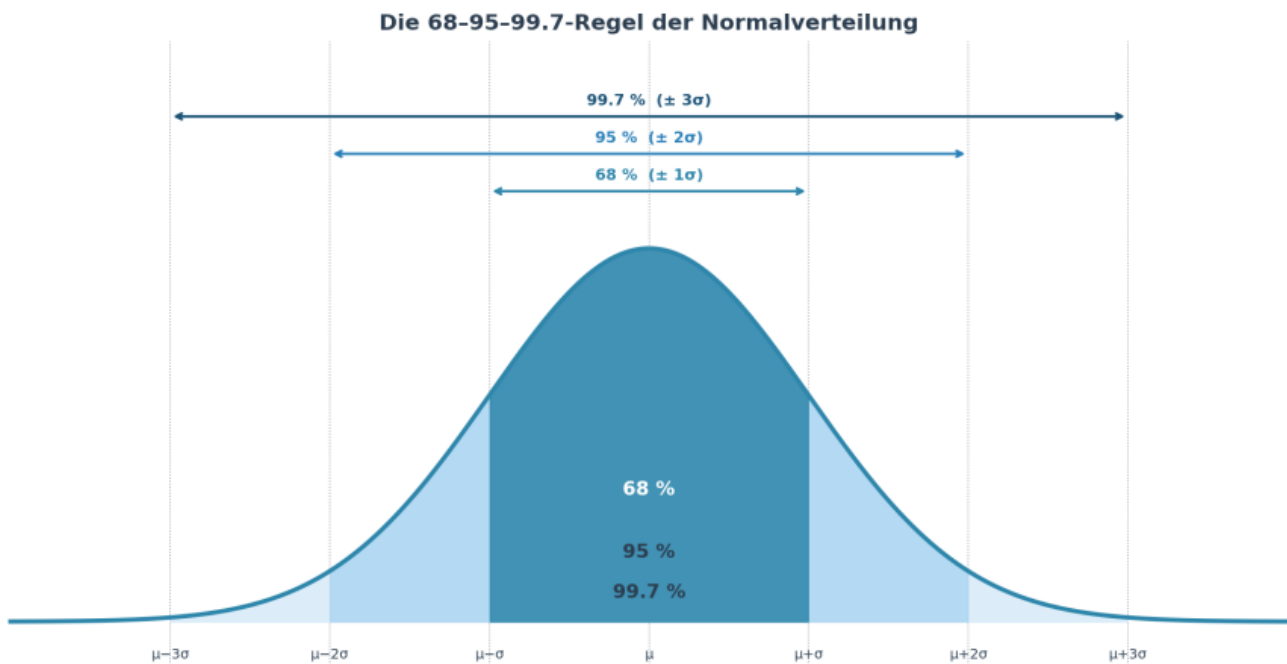
Die Formel für die Standardabweichung lautet:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

Hinweis: In der Praxis verwenden wir oft einen Taschenrechner oder Software (Excel, Python) für die Berechnung.

2) Die 68-95-99.7-Regel

Bei einer normalverteilten Datenmenge gilt immer folgende **Faustregel**:



Bereich	Anteil der Werte	Bedeutung
$\mu \pm 1\sigma$	68 %	Wahrscheinlich – 68 von 100 Werten fallen hier rein
$\mu \pm 2\sigma$	95 %	Sehr wahrscheinlich – 95 von 100
$\mu \pm 3\sigma$	99.7 %	Fast sicher – 997 von 1000

Diese Regel wird auch **Empirische Regel** genannt und ist eines der wichtigsten Werkzeuge der Statistik.

2.1 Anwendungsbeispiel: Körpergrößen

In einer Schule sind **95 % der Schülerinnen und Schüler zwischen 1.1 m und 1.7 m gross.**

Angenommen, die Daten sind normalverteilt – gesucht: Mittelwert μ und Standardabweichung σ .

Schritt 1 - Mittelwert berechnen: $\mu = \frac{1.1 + 1.7}{2} = 1.4 \text{ m}$

Schritt 2 - Standardabweichung berechnen:

95 % entsprechen $\pm 2\sigma$ → der Gesamtbereich von 1.1 bis 1.7 m umfasst 4σ :
$$\left[\sigma = \frac{1.7 - 1.1}{4} = \frac{0.6}{4} = 0.15 \text{ m} \right]$$

Kontrolle:

- 1σ -Bereich: 1.25 m – 1.55 m → ca. **68 %** der Schüler
- 2σ -Bereich: 1.10 m – 1.70 m → ca. **95 %** der Schüler ✓
- 3σ -Bereich: 0.95 m – 1.85 m → ca. **99.7 %** der Schüler

3) Der z-Score (Standardwert)

Der **z-Score** gibt an, wie viele Standardabweichungen ein bestimmter Wert (x) vom Mittelwert μ entfernt ist.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Dabei gilt:

Symbol	Bedeutung
z	z-Score (Standardwert)
x	der zu standardisierende Wert
μ	Mittelwert der Verteilung
σ	Standardabweichung

3.1 Vorgehen

1. Mittelwert subtrahieren: $(x - \mu)$
2. Durch Standardabweichung dividieren: $(\div; \sigma)$

Ergebnis: Ein z-Score von **+2** bedeutet: der Wert liegt 2 Standardabweichungen **über** dem Mittelwert. Ein z-Score von **-1** bedeutet: 1 Standardabweichung **unter** dem Mittelwert.

3.2 Beispiel: Reisezeiten

Eine Umfrage über tägliche Reisezeiten (in Minuten) ergab:

26, 33, 65, 28, 34, 55, 25, 44, 50, 36, 26, 37, 43, 62, 35, 38, 45, 32, 28, 34

- Mittelwert: $(\mu = 38.8)$ Minuten
- Standardabweichung: $(\sigma = 11.4)$ Minuten

Die ersten drei Werte standardisiert:

Originalwert (x)	Berechnung	z-Score	Interpretation
26	$\left(\frac{26 - 38.8}{11.4} \right)$	-1.12	1.12σ unter dem Mittelwert
33	$\left(\frac{33 - 38.8}{11.4} \right)$	-0.51	0.51σ unter dem Mittelwert

Originalwert (x)	Berechnung	z-Score	Interpretation
65	$\frac{65 - 38.8}{11.4}$	+2.30	2.30 σ über dem Mittelwert

3.3 Wozu dient der z-Score?

- **Vergleichbarkeit:** Werte aus verschiedenen Verteilungen können direkt verglichen werden.
- **Tabellen:** Mit einer einzigen Standardnormaltabelle lassen sich Wahrscheinlichkeiten für beliebige Normalverteilungen ablesen.
- **Ausreisser erkennen:** Werte mit $|z| > 3$ gelten als statistisch ungewöhnlich.

3.4 Praxisbeispiel: Faire Benotung

Ein Lehrer bewertet einen Test (max. 60 Punkte):

20, 15, 26, 32, 18, 28, 35, 14, 26, 22, 17

Der Test war zu schwer - die meisten Schüler bestehen nicht. Der Lehrer standardisiert die Noten und erklärt alle z-Scores unter -1 als „ungenügend“:

- $(\mu = 23), (\sigma = 6.6)$
- z-Scores: $-0.45, -1.21, 0.45, 1.36, -0.76, 0.76, 1.82, -1.36, 0.45, -0.15, -0.91$

Nur **2 Schüler** (fett) gelten als ungenügend \rightarrow deutlich fairer!

4) Prozentzonen der Standardnormalverteilung

Die Standardnormalverteilung ($\mu = 0, \sigma = 1$) lässt sich in Zonen aufteilen:

Zone	Anteil in diesem Bereich	Kumulierter Anteil (ab $-\infty$)
unter -3σ	0.1 %	0.1 %
-3σ bis -2σ	2.1 %	2.3 %
-2σ bis -1σ	13.6 %	15.9 %
-1σ bis 0	34.1 %	50.0 %
0 bis $+1\sigma$	34.1 %	84.1 %
$+1\sigma$ bis $+2\sigma$	13.6 %	97.7 %
$+2\sigma$ bis $+3\sigma$	2.1 %	99.7 %
über $+3\sigma$	0.1 %	99.9 %

Lesbeispiel

Dein Testergebnis liegt **0.5 Standardabweichungen über dem Durchschnitt** ($z = +0.5$). Wie viele Personen schnitten schlechter ab?

- Anteil unter dem Mittelwert ($z < 0$): **50 %**

- Anteil zwischen 0 und $+0.5\sigma$: **19.1 %**
- Total: **69.1 %** schnitten schlechter ab als du.

5) Praxisbeispiel: Zuckerbeutel-Produktion

Eine Abfüllmaschine hat: $\mu = 1010$ g, $\sigma = 20$ g.

Problem: Etwa 31 % der Beutel enthalten weniger als 1000 g!

Ziel: 1000 g soll bei -2.5σ liegen (dann nur noch 0.6 % zu leichte Beutel).

Option A - Mittelwert erhöhen: $\mu_{\text{neu}} = 1000 + 2.5 \times 20 = 1050$ g

Option B - Streuung verringern: $\sigma_{\text{neu}} = \frac{10}{2.5} = 4$ g

Fazit: Mit der 68-95-99.7-Regel und dem z-Score können Produktionsprozesse **quantitativ gesteuert** werden - entweder durch Anpassen des Mittelwerts oder durch Verringern der Streuung.

Verständnisfragen

1. Ein Datensatz hat $\mu = 50$ und $\sigma = 10$. Welcher Anteil der Werte liegt zwischen **30 und 70**?
2. Berechne den z-Score für $x = 75$, wenn $\mu = 60$ und $\sigma = 8$.
3. Was bedeutet ein z-Score von **-2.5** anschaulich?
4. Warum ist die Standardisierung nützlich, wenn man Werte aus **verschiedenen Verteilungen** vergleichen will?
5. Eine Maschine produziert Teile mit $\mu = 100$ mm und $\sigma = 2$ mm. Wie gross ist der Anteil der Teile, die **kürzer als 96 mm** sind?



Bearbeitet nach mathsisfun.com

From:
<https://wiki.bzz.ch/> - **BZZ - Modulwiki**

Permanent link:
<https://wiki.bzz.ch/modul/mathe/ma4/thema/wahrscheinlichkeit/standardabweichung?rev=1776063015>

Last update: **2026/04/13 08:50**

