

# LU02b - Standardabweichung und die 68-95-99.7-Regel

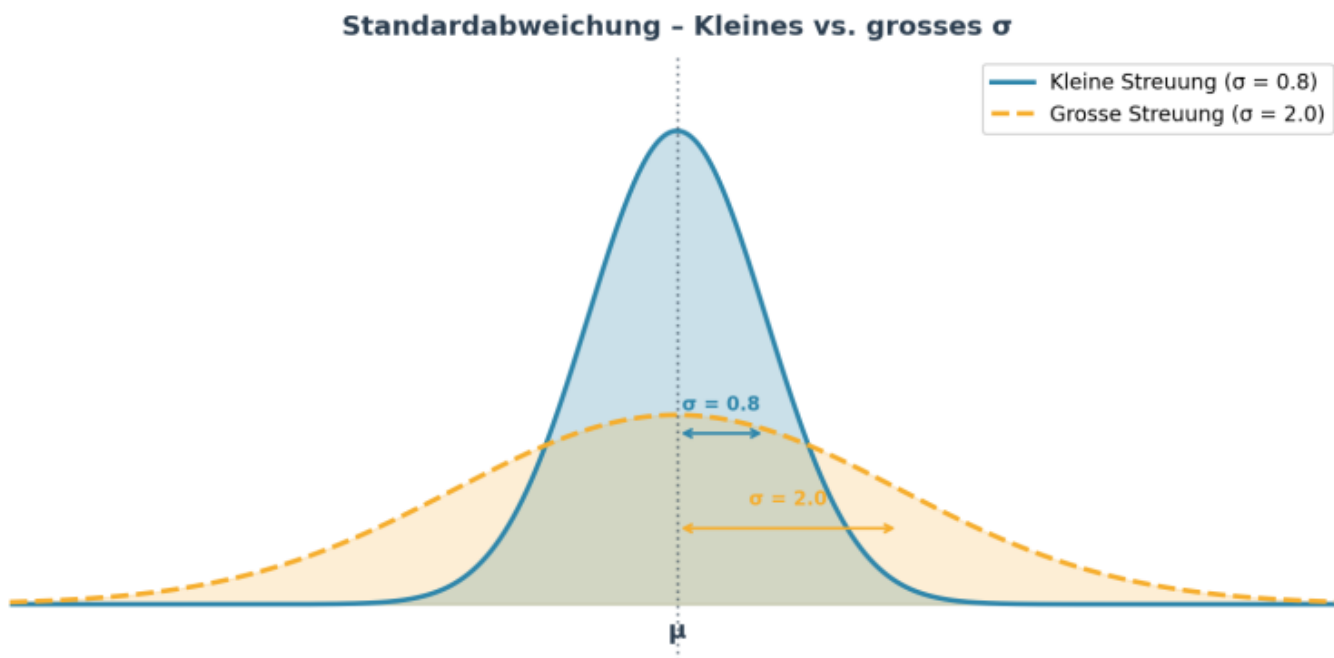
**Ziel:** Du kannst die Standardabweichung als Streuungsmass erklären, die 68-95-99.7-Regel anwenden und Werte mithilfe des **z-Scores** **standardisieren**.

## Kurztheorie (Merksätze)

- **$\sigma$  (Sigma)** = Standardabweichung → misst, wie stark Werte um den Mittelwert streuen.
- **68 %** aller Werte liegen innerhalb von  **$\pm 1\sigma$**  vom Mittelwert.
- **95 %** aller Werte liegen innerhalb von  **$\pm 2\sigma$**  vom Mittelwert.
- **99.7 %** aller Werte liegen innerhalb von  **$\pm 3\sigma$**  vom Mittelwert.

## 1) Was ist die Standardabweichung?

Die **Standardabweichung  $\sigma$**  (Sigma) misst, wie stark die Werte eines Datensatzes um den **Mittelwert  $\mu$**  herum streuen.



Sigma	Bedeutung	Kurvenform
<b>Kleines <math>\sigma</math></b>	Werte liegen eng beieinander	Schmale, hohe Glocke
<b>Grosses <math>\sigma</math></b>	Werte sind weit gestreut	Breite, flache Glocke

**Merksatz:** Ein kleines  $\sigma$  bedeutet **Präzision** (z.B. eine gut kalibrierte Maschine). Ein grosses  $\sigma$  bedeutet **grosse Streuung** (z.B. unterschiedliche Testergebnisse in einer heterogenen Klasse).

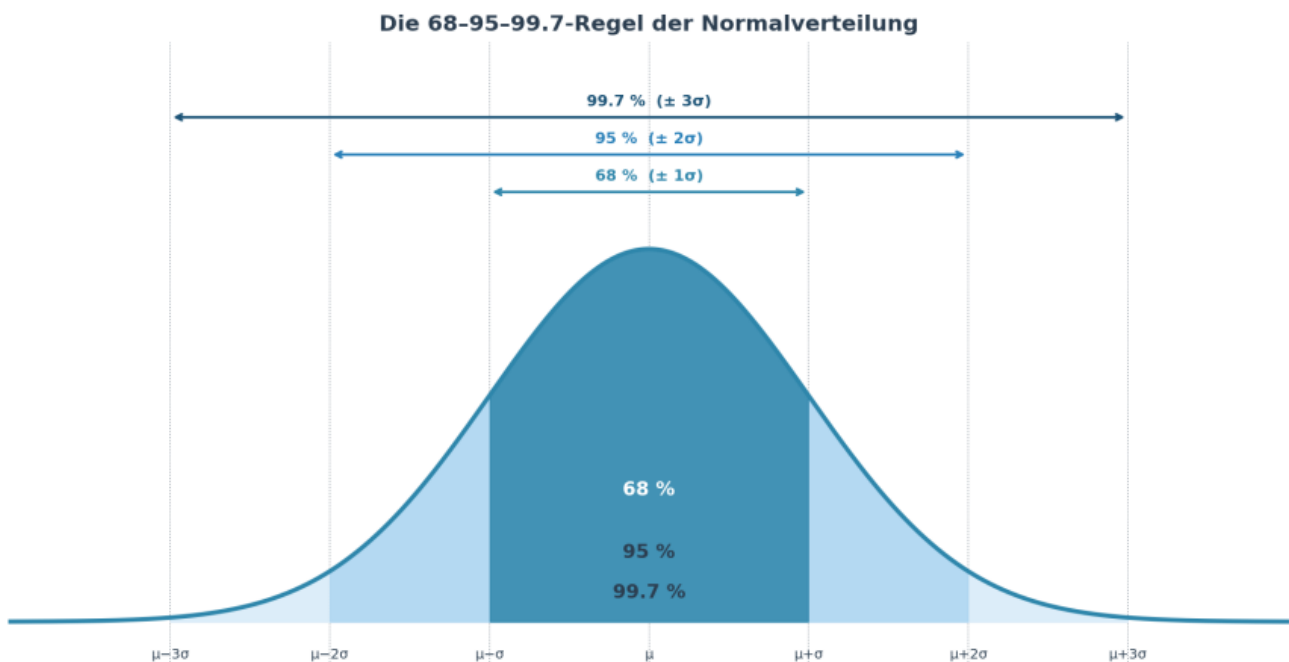
Die Formel für die Standardabweichung lautet:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

**Hinweis:** In der Praxis verwenden wir oft einen Taschenrechner oder Software (Excel, Python) für die Berechnung.

## 2) Die 68-95-99.7-Regel

Bei einer normalverteilten Datenmenge gilt immer folgende **Faustregel**:



Bereich	Anteil der Werte	Bedeutung
$\mu \pm 1\sigma$	<b>68 %</b>	Wahrscheinlich - 68 von 100 Werten fallen hier rein
$\mu \pm 2\sigma$	<b>95 %</b>	Sehr wahrscheinlich - 95 von 100
$\mu \pm 3\sigma$	<b>99.7 %</b>	Fast sicher - 997 von 1000

Diese Regel wird auch **Empirische Regel** genannt und ist eines der wichtigsten Werkzeuge der Statistik.

### 2.1 Anwendungsbeispiel: Körpergrößen

In einer Schule sind **95 % der Schülerinnen und Schüler zwischen 1.1 m und 1.7 m gross.**

Angenommen, die Daten sind normalverteilt - gesucht: Mittelwert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$ .

**Schritt 1 - Mittelwert berechnen:**

$$\mu = \frac{1.1 + 1.7}{2} = 1.4 \text{ m}$$

**Schritt 2 - Standardabweichung berechnen:**

95 % entsprechen  $\pm 2\sigma$  → der Gesamtbereich von 1.1 bis 1.7 m umfasst  $4\sigma$ :

$$\sigma = \frac{1.7 - 1.1}{4} = \frac{0.6}{4} = 0.15 \text{ m}$$

**Kontrolle:**

- $1\sigma$ -Bereich: 1.25 m - 1.55 m → ca. **68 %** der Schüler
- $2\sigma$ -Bereich: 1.10 m - 1.70 m → ca. **95 %** der Schüler ✓
- $3\sigma$ -Bereich: 0.95 m - 1.85 m → ca. **99.7 %** der Schüler

**3) Prozentzonen der Standardnormalverteilung**

Die Standardnormalverteilung ( $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ ) lässt sich in Zonen aufteilen:

Zone	Anteil in diesem Bereich	Kumulierter Anteil (ab $-\infty$ )
unter $-3\sigma$	0.1 %	0.1 %
$-3\sigma$ bis $-2\sigma$	2.1 %	2.3 %
$-2\sigma$ bis $-1\sigma$	13.6 %	15.9 %
$-1\sigma$ bis 0	34.1 %	50.0 %
0 bis $+1\sigma$	34.1 %	84.1 %
$+1\sigma$ bis $+2\sigma$	13.6 %	97.7 %
$+2\sigma$ bis $+3\sigma$	2.1 %	99.7 %
über $+3\sigma$	0.1 %	99.9 %

**Lesbeispiel**

Dein Testergebnis liegt **0.5 Standardabweichungen über dem Durchschnitt** ( $z = +0.5$ ). Wie viele Personen schnitten schlechter ab?

- Anteil unter dem Mittelwert ( $z < 0$ ): **50 %**
- Anteil zwischen 0 und  $+0.5\sigma$ : **19.1 %**
- Total: **69.1 %** schnitten schlechter ab als du.

**4) Praxisbeispiel: Zuckerbeutel-Produktion**

Eine Abfüllmaschine hat:  $\mu = 1010$  g,  $\sigma = 20$  g.

**Problem:** Etwa 31 % der Beutel enthalten weniger als 1000 g!

**Ziel:** 1000 g soll bei  $-2.5\sigma$  liegen (dann nur noch 0.6 % zu leichte Beutel).

**Option A - Mittelwert erhöhen:**

$$\mu_{neu} = 1000 + 2.5 \times 20 = 1050 \text{ g}$$

**Option B - Streuung verringern:**

$$\sigma_{neu} = \frac{10}{2.5} = 4 \text{ g}$$

**Fazit:** Mit der 68-95-99.7-Regel und dem z-Score können Produktionsprozesse **quantitativ gesteuert** werden - entweder durch Anpassen des Mittelwerts oder durch Verringern der Streuung.

---

## Verständnisfragen

1. Ein Datensatz hat  $(\mu = 50)$  und  $(\sigma = 10)$ . Welcher Anteil der Werte liegt zwischen **30 und 70**?
  2. Berechne den z-Score für  $(x = 75)$ , wenn  $(\mu = 60)$  und  $(\sigma = 8)$ .
  3. Was bedeutet ein z-Score von **-2.5** anschaulich?
  4. Warum ist die Standardisierung nützlich, wenn man Werte aus **verschiedenen Verteilungen** vergleichen will?
  5. Eine Maschine produziert Teile mit  $(\mu = 100)$  mm und  $(\sigma = 2)$  mm. Wie gross ist der Anteil der Teile, die **kürzer als 96 mm** sind?
- 

## 5) Normalverteilung ohne Histogramm prüfen

Manchmal liegt kein Histogramm vor - man hat nur die **rohen Datenwerte**. Trotzdem lässt sich mit der empirischen Regel prüfen, ob die Daten näherungsweise normalverteilt (hügel förmig) sind.

> **Grundidee:** Wenn ein Datensatz wirklich normalverteilt ist, dann müssten ungefähr **68 %**, **95 %** und **99.7 %** der Werte in den entsprechenden  $\sigma$ -Bändern liegen. Wir berechnen das selbst - und vergleichen.

### 5.1 Vorgehen (Schritt für Schritt)

**Schritt 1 - Mittelwert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  berechnen**

Aus den Rohdaten:  $(\mu = \bar{\{x\}})$  und  $(\sigma)$  wie gewohnt (Taschenrechner oder Excel).

### Schritt 2 - Die drei Intervallgrenzen bestimmen

$$\left[ \mu - \sigma ; \mu + \sigma \right] \quad \left[ \mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma \right] \quad \left[ \mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma \right]$$

### Schritt 3 - Werte in jedem Band zählen

Wie viele Datenpunkte liegen innerhalb jedes Intervalls? → Anzahl durch Gesamtanzahl  $(n)$  dividieren → Prozentwert.

### Schritt 4 - Mit der 68-95-99.7-Regel vergleichen

Band	Gemessener Anteil	Erwarteter Anteil	Beurteilung
$\mu \pm 1\sigma$	(selbst berechnet)	≈ 68 %	Abweichung < 10 % → OK
$\mu \pm 2\sigma$	(selbst berechnet)	≈ 95 %	Abweichung < 5 % → OK
$\mu \pm 3\sigma$	(selbst berechnet)	≈ 99.7 %	Fast alle Werte → OK

Wenn alle drei Werte gut übereinstimmen: Daten sind **näherungsweise normalverteilt**.

> **Wichtig:** Bei kleinen Stichproben ( $n < 30$ ) sind Abweichungen normal - die Regel funktioniert besser bei grossen Datensätzen.

## 5.2 Vollständiges Beispiel: Testergebnisse

**Gegeben:** Testergebnisse von 30 Schülerinnen und Schülern (Punkte von 100):

62, 65, 68, 68, 70, 71, 72, 72, 73, 74,

74, 75, 75, 76, 76, 77, 77, 78, 78, 79,  
79, 80, 81, 82, 82, 83, 84, 85, 87, 91

### Schritt 1 - Kennzahlen berechnen:

$$\left[ \mu = 76.8 \quad \sigma = 6.1 \quad n = 30 \right]$$

### Schritt 2 - Intervallgrenzen:

$$\left[ \mu \pm 1\sigma = [70.7 ; 82.9] \right] \quad \left[ \mu \pm 2\sigma = [64.6 ; 89.0] \right] \quad \left[ \mu \pm 3\sigma = [58.5 ; 95.1] \right]$$

### Schritt 3 - Werte zählen:

Band	Intervall	Anzahl Werte	Anteil
$\mu \pm 1\sigma$	[70.7 - 82.9]	21 von 30	<b>70 %</b>
$\mu \pm 2\sigma$	[64.6 - 89.0]	28 von 30	<b>93 %</b>
$\mu \pm 3\sigma$	[58.5 - 95.1]	30 von 30	<b>100 %</b>

### Schritt 4 - Vergleich und Urteil:



Band	Gemessen	Erwartet	Differenz	Urteil
$\mu \pm 1\sigma$	70 %	68 %	+2 %	✓ passt gut
$\mu \pm 2\sigma$	93 %	95 %	-2 %	✓ passt gut
$\mu \pm 3\sigma$	100 %	99.7 %	+0.3 %	✓ passt gut

**Fazit:** Alle drei Bänder stimmen gut mit den Erwartungswerten überein → Die Testergebnisse sind **näherungsweise normalverteilt**.

### 5.3 Gegenbeispiel: Stark schiefe Daten

**Gegeben:** Jahreseinkommen von 20 Personen (in TCHF):

42, 45, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 55, 58,

60, 62, 65, 70, 80, 95, 110, 140, 200, 380

$\mu = 88.2 \quad \sigma = 82.5 \quad n = 20$

Band	Intervall	Anteil	Erwartet	Urteil
$\mu \pm 1\sigma$	[5.7 - 170.7]	18 / 20 = <b>90 %</b>	68 %	✗ zu viele
$\mu \pm 2\sigma$	[-76.8 - 253.2]	19 / 20 = <b>95 %</b>	95 %	~ passt zufällig
$\mu \pm 3\sigma$	[-159.3 - 335.7]	19 / 20 = <b>95 %</b>	99.7 %	✗ zu wenige

**Fazit:** Das  $1\sigma$ -Band enthält 90 % statt 68 % → Die Daten sind **rechtsschief verteilt**, nicht normalverteilt. (Typisch für Einkommensdaten.)

### 5.4 Zusammenfassung: Schnellcheck

1.  $\mu$  und  $\sigma$  berechnen
2. Grenzen bestimmen:  $\mu \pm 1\sigma$ ,  $\mu \pm 2\sigma$ ,  $\mu \pm 3\sigma$
3. Werte in jedem Band zählen → Prozent berechnen
4. Vergleichen:
  - ≈ 68 % im  $1\sigma$ -Band?
  - ≈ 95 % im  $2\sigma$ -Band?
  - ≈ 99.7% im  $3\sigma$ -Band?
5. Urteil: Alle drei passen → näherungsweise normalverteilt ✓  
Starke Abweichungen → eher nicht normalverteilt ✗

> **Einschränkung:** Diese Methode ist ein **pragmatischer Schnellcheck**, kein formaler statistischer Test. Für eine strenge Prüfung gibt es spezielle Tests (z.B. Shapiro-Wilk), die aber ausserhalb des Lernziels dieser Einheit liegen.



Bearbeitet nach [mathsisfun.com](https://mathsisfun.com)

From:

<https://wiki.bzz.ch/> - **BZZ - Modulwiki**

Permanent link:

<https://wiki.bzz.ch/modul/mathe/ma4/thema/wahrscheinlichkeit/standardabweichung?rev=1776065447>

Last update: **2026/04/13 09:30**

