

LU02b - Standardabweichung und die 68-95-99.7-Regel

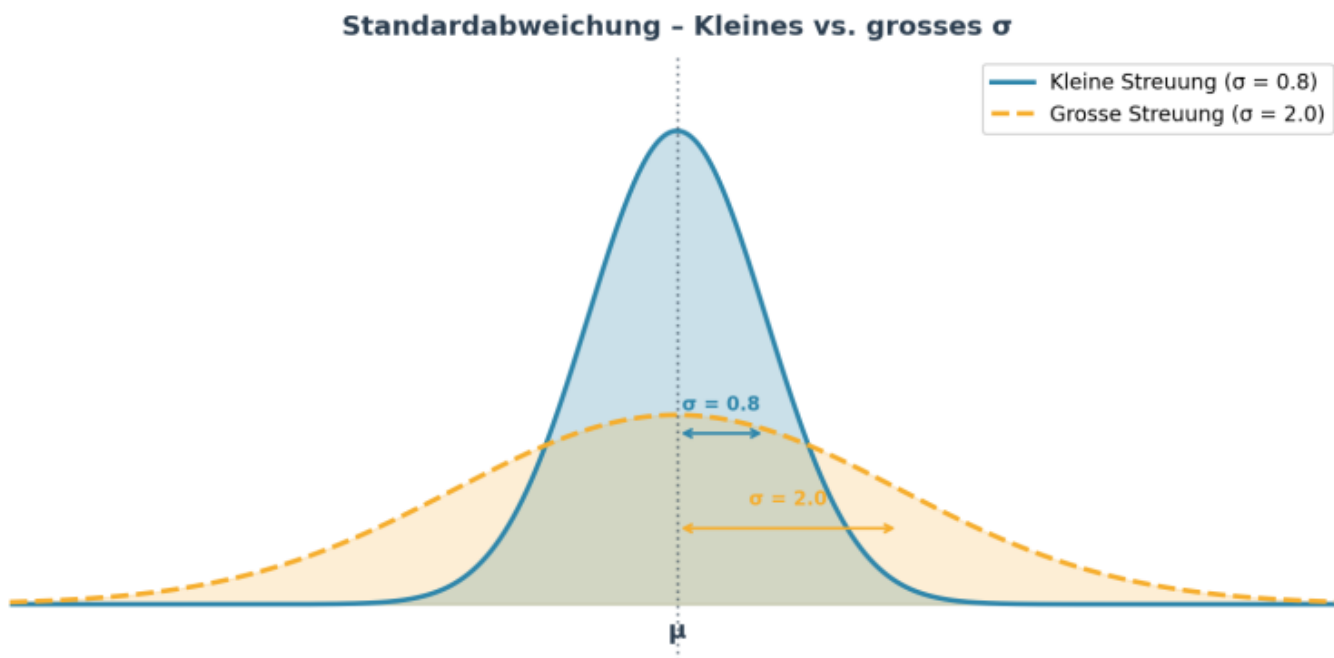
Ziel: Du kannst die Standardabweichung als Streuungsmass erklären, die 68-95-99.7-Regel anwenden und Werte mithilfe des **z-Scores** **standardisieren**.

Kurztheorie (Merksätze)

- **σ (Sigma)** = Standardabweichung → misst, wie stark Werte um den Mittelwert streuen.
- **68 %** aller Werte liegen innerhalb von **$\pm 1\sigma$** vom Mittelwert.
- **95 %** aller Werte liegen innerhalb von **$\pm 2\sigma$** vom Mittelwert.
- **99.7 %** aller Werte liegen innerhalb von **$\pm 3\sigma$** vom Mittelwert.

1) Was ist die Standardabweichung?

Die **Standardabweichung σ** (Sigma) misst, wie stark die Werte eines Datensatzes um den **Mittelwert μ** herum streuen.



Sigma	Bedeutung	Kurvenform
Kleines σ	Werte liegen eng beieinander	Schmale, hohe Glocke
Grosses σ	Werte sind weit gestreut	Breite, flache Glocke

Merksatz: Ein kleines σ bedeutet **Präzision** (z.B. eine gut kalibrierte Maschine). Ein grosses σ bedeutet **grosse Streuung** (z.B. unterschiedliche Testergebnisse in einer heterogenen Klasse).

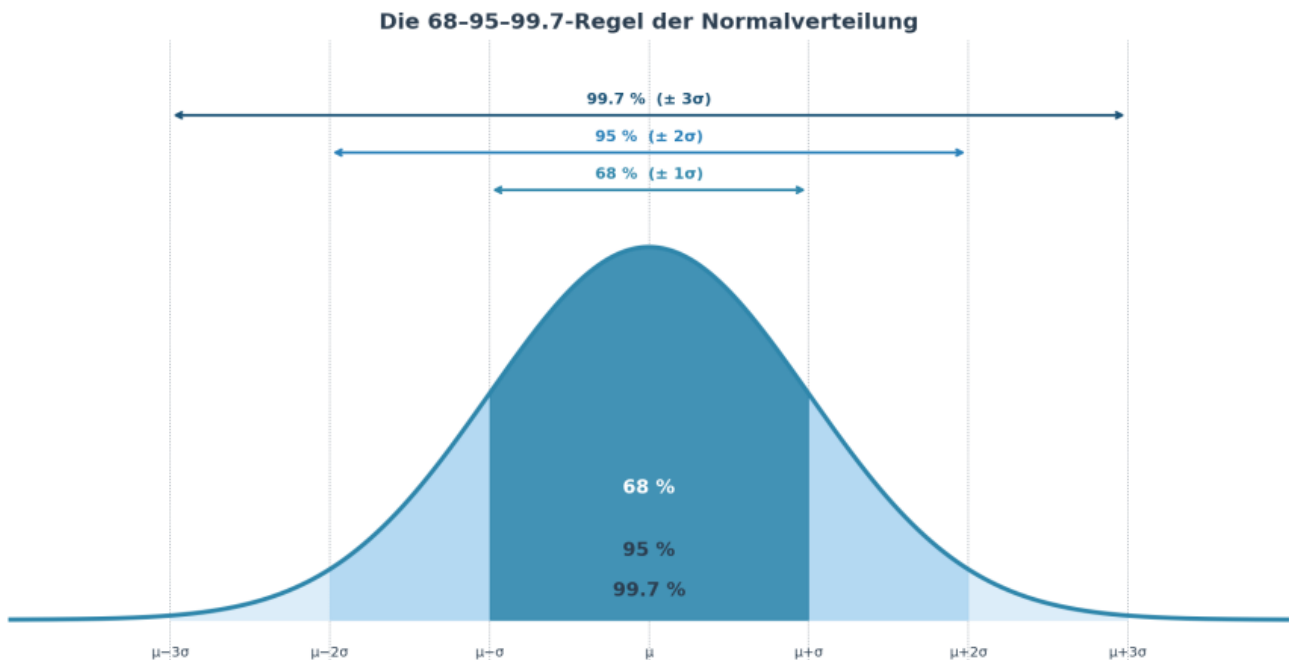
Die Formel für die Standardabweichung lautet:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

Hinweis: In der Praxis verwenden wir oft einen Taschenrechner oder Software (Excel, Python) für die Berechnung.

2) Die 68-95-99.7-Regel

Bei einer normalverteilten Datenmenge gilt immer folgende **Faustregel**:



Bereich	Anteil der Werte	Bedeutung
$\mu \pm 1\sigma$	68 %	Wahrscheinlich - 68 von 100 Werten fallen hier rein
$\mu \pm 2\sigma$	95 %	Sehr wahrscheinlich - 95 von 100
$\mu \pm 3\sigma$	99.7 %	Fast sicher - 997 von 1000

Diese Regel wird auch **Empirische Regel** genannt und ist eines der wichtigsten Werkzeuge der Statistik.

2.1 Anwendungsbeispiel: Körpergrößen

In einer Schule sind **95 % der Schülerinnen und Schüler zwischen 1.1 m und 1.7 m gross.**

Angenommen, die Daten sind normalverteilt - gesucht: Mittelwert μ und Standardabweichung σ .

Schritt 1 - Mittelwert berechnen:

$$\mu = \frac{1.1 + 1.7}{2} = 1.4 \text{ m}$$

Schritt 2 - Standardabweichung berechnen:

95 % entsprechen $\pm 2\sigma$ → der Gesamtbereich von 1.1 bis 1.7 m umfasst 4σ :

$$\sigma = \frac{1.7 - 1.1}{4} = \frac{0.6}{4} = 0.15 \text{ m}$$

Kontrolle:

- 1σ -Bereich: 1.25 m - 1.55 m → ca. **68 %** der Schüler
- 2σ -Bereich: 1.10 m - 1.70 m → ca. **95 %** der Schüler ✓
- 3σ -Bereich: 0.95 m - 1.85 m → ca. **99.7 %** der Schüler

3) Prozentzonen der Standardnormalverteilung

Die Standardnormalverteilung ($\mu = 0$, $\sigma = 1$) lässt sich in Zonen aufteilen:

Zone	Anteil in diesem Bereich	Kumulierter Anteil (ab $-\infty$)
unter -3σ	0.1 %	0.1 %
-3σ bis -2σ	2.1 %	2.3 %
-2σ bis -1σ	13.6 %	15.9 %
-1σ bis 0	34.1 %	50.0 %
0 bis $+1\sigma$	34.1 %	84.1 %
$+1\sigma$ bis $+2\sigma$	13.6 %	97.7 %
$+2\sigma$ bis $+3\sigma$	2.1 %	99.7 %
über $+3\sigma$	0.1 %	99.9 %

Lesbeispiel

Dein Testergebnis liegt **0.5 Standardabweichungen über dem Durchschnitt** ($z = +0.5$). Wie viele Personen schnitten schlechter ab?

- Anteil unter dem Mittelwert ($z < 0$): **50 %**
- Anteil zwischen 0 und $+0.5\sigma$: **19.1 %**
- Total: **69.1 %** schnitten schlechter ab als du.

4) Praxisbeispiel: Zuckerbeutel-Produktion

Eine Abfüllmaschine hat: $\mu = 1010$ g, $\sigma = 20$ g.

Problem: Etwa 31 % der Beutel enthalten weniger als 1000 g!

Ziel: 1000 g soll bei -2.5σ liegen (dann nur noch 0.6 % zu leichte Beutel).

Option A - Mittelwert erhöhen:

$$\mu_{neu} = 1000 + 2.5 \times 20 = 1050 \text{ g}$$

Option B - Streuung verringern:

$$\sigma_{neu} = \frac{10}{2.5} = 4 \text{ g}$$

Fazit: Mit der 68-95-99.7-Regel und dem z-Score können Produktionsprozesse **quantitativ gesteuert** werden - entweder durch Anpassen des Mittelwerts oder durch Verringern der Streuung.

Verständnisfragen

1. Ein Datensatz hat $(\mu = 50)$ und $(\sigma = 10)$. Welcher Anteil der Werte liegt zwischen **30 und 70**?
 2. Berechne den z-Score für $(x = 75)$, wenn $(\mu = 60)$ und $(\sigma = 8)$.
 3. Was bedeutet ein z-Score von -2.5 anschaulich?
 4. Warum ist die Standardisierung nützlich, wenn man Werte aus **verschiedenen Verteilungen** vergleichen will?
 5. Eine Maschine produziert Teile mit $(\mu = 100)$ mm und $(\sigma = 2)$ mm. Wie gross ist der Anteil der Teile, die **kürzer als 96 mm** sind?
-

5) Normalverteilung ohne Histogramm prüfen

Manchmal liegt kein Histogramm vor - man hat nur die **rohen Datenwerte**. Trotzdem lässt sich mit der empirischen Regel prüfen, ob die Daten näherungsweise normalverteilt (hügel förmig) sind.

> **Grundidee:** Wenn ein Datensatz wirklich normalverteilt ist, dann müssten ungefähr **68 %**, **95 %** und **99.7 %** der Werte in den entsprechenden σ -Bändern liegen. Wir berechnen das selbst - und vergleichen.

5.1 Vorgehen (Schritt für Schritt)

Schritt 1 - Mittelwert μ und Standardabweichung σ berechnen

Aus den Rohdaten: $(\mu = \bar{\{x\}})$ und (σ) wie gewohnt (Taschenrechner oder Excel).

Schritt 2 - Die drei Intervallgrenzen bestimmen

$$[\mu - \sigma; \mu + \sigma] \quad [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] \quad [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$$

Schritt 3 - Werte in jedem Band zählen

Wie viele Datenpunkte liegen innerhalb jedes Intervalls? → Anzahl durch Gesamtanzahl (n) dividieren → Prozentwert.

Schritt 4 - Mit der 68-95-99.7-Regel vergleichen

Band	Gemessener Anteil	Erwarteter Anteil	Beurteilung
$\mu \pm 1\sigma$	(selbst berechnet)	≈ 68 %	Abweichung < 10 % → OK
$\mu \pm 2\sigma$	(selbst berechnet)	≈ 95 %	Abweichung < 5 % → OK
$\mu \pm 3\sigma$	(selbst berechnet)	≈ 99.7 %	Fast alle Werte → OK

Wenn alle drei Werte gut übereinstimmen: Daten sind **näherungsweise normalverteilt**.

> **Wichtig:** Bei kleinen Stichproben ($n < 30$) sind Abweichungen normal - die Regel funktioniert besser bei grossen Datensätzen.

5.2 Vollständiges Beispiel: Testergebnisse

Gegeben: Testergebnisse von 30 Schülerinnen und Schülern (Punkte von 100):

62, 65, 68, 68, 70, 71, 72, 72, 73, 74,

74, 75, 75, 76, 76, 77, 77, 78, 78, 79,
79, 80, 81, 82, 82, 83, 84, 85, 87, 91

Schritt 1 - Kennzahlen berechnen:

$$[\mu = 76.8 \quad \sigma = 6.1 \quad n = 30]$$

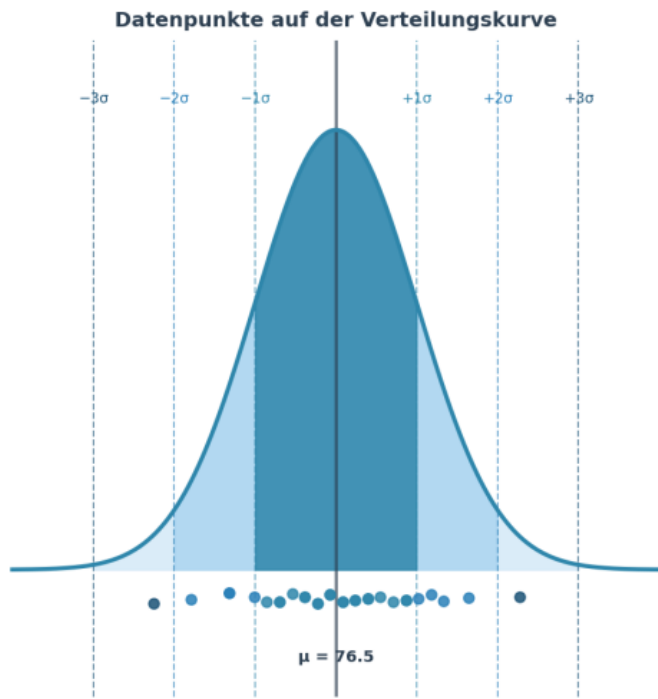
Schritt 2 - Intervallgrenzen:

$$[\mu \pm 1\sigma = [70.7; 82.9]] \quad [\mu \pm 2\sigma = [64.6; 89.0]] \quad [\mu \pm 3\sigma = [58.5; 95.1]]$$

Schritt 3 - Werte zählen:

Band	Intervall	Anzahl Werte	Anteil
$\mu \pm 1\sigma$	[70.7 - 82.9]	21 von 30	70 %
$\mu \pm 2\sigma$	[64.6 - 89.0]	28 von 30	93 %
$\mu \pm 3\sigma$	[58.5 - 95.1]	30 von 30	100 %

Schritt 4 - Vergleich und Urteil:



Empirische Überprüfung
Datensatz: $n = 30$ Werte $\mu = 76.5$ $\sigma = 6.4$

Bereich	Intervall	Anzahl Werte	Gemessen	Erwartet	✓ / ✗
$\pm 1\sigma$	[70.1 - 82.9]	20 / 30	67 %	68 %	✓
$\pm 2\sigma$	[63.7 - 89.3]	28 / 30	93 %	95 %	✓
$\pm 3\sigma$	[57.2 - 95.7]	30 / 30	100 %	99.7 %	✓

✓ **Daten sind näherungsweise normalverteilt**

Vorgehen: 1) μ und σ berechnen → 2) Grenzen $\mu \pm 1\sigma$, $\mu \pm 2\sigma$, $\mu \pm 3\sigma$ bestimmen
3) Werte innerhalb jeder Grenze zählen → 4) Prozentwerte mit 68 / 95 / 99.7 % vergleichen

Band	Gemessen	Erwartet	Differenz	Urteil
$\mu \pm 1\sigma$	70 %	68 %	+2 %	✓ passt gut
$\mu \pm 2\sigma$	93 %	95 %	-2 %	✓ passt gut
$\mu \pm 3\sigma$	100 %	99.7 %	+0.3 %	✓ passt gut

Fazit: Alle drei Bänder stimmen gut mit den Erwartungswerten überein → Die Testergebnisse sind **näherungsweise normalverteilt**.

5.3 Gegenbeispiel: Stark schiefe Daten

Gegeben: Jahreseinkommen von 20 Personen (in TCHF):

42, 45, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 55, 58,

60, 62, 65, 70, 80, 95, 110, 140, 200, 380

$\mu = 88.2$ $\sigma = 82.5$ $n = 20$

Band	Intervall	Anteil	Erwartet	Urteil
$\mu \pm 1\sigma$	[5.7 - 170.7]	18 / 20 = 90 %	68 %	✗ zu viele
$\mu \pm 2\sigma$	[-76.8 - 253.2]	19 / 20 = 95 %	95 %	~ passt zufällig
$\mu \pm 3\sigma$	[-159.3 - 335.7]	19 / 20 = 95 %	99.7 %	✗ zu wenige

Fazit: Das 1σ -Band enthält 90 % statt 68 % → Die Daten sind **rechtsschief verteilt**, nicht normalverteilt. (Typisch für Einkommensdaten.)

5.4 Zusammenfassung: Schnellcheck

1. μ und σ berechnen
2. Grenzen bestimmen: $\mu \pm 1\sigma$, $\mu \pm 2\sigma$, $\mu \pm 3\sigma$
3. Werte in jedem Band zählen \rightarrow Prozent berechnen
4. Vergleichen:
 - $\approx 68\%$ im 1σ -Band?
 - $\approx 95\%$ im 2σ -Band?
 - $\approx 99.7\%$ im 3σ -Band?
5. Urteil: Alle drei passen \rightarrow näherungsweise normalverteilt \checkmark
Starke Abweichungen \rightarrow eher nicht normalverteilt \times

> **Einschränkung:** Diese Methode ist ein **pragmatischer Schnellcheck**, kein formaler statistischer Test. Für eine strenge Prüfung gibt es spezielle Tests (z.B. Shapiro-Wilk), die aber ausserhalb des Lernziels dieser Einheit liegen.



Bearbeitet nach [mathsisfun.com](https://www.mathsisfun.com)

From:

<https://wiki.bzz.ch/> - **BZZ - Modulwiki**

Permanent link:

<https://wiki.bzz.ch/modul/mathe/ma4/thema/wahrscheinlichkeit/standardabweichung?rev=1776065494>

Last update: **2026/04/13 09:31**

