Faktorisierung

Beim **Faktorisieren** wandelst du einen Term, der eine **Summe (+)** oder eine **Differenz (-)** ist, in ein **Produkt (·)** um. Das ist nützlich, um zum Beispiel Nullstellen einfacher zu finden oder Brüche leichter zu kürzen.

Es gibt drei Techniken, um einen Term zu faktorisieren:

1. **Ausklammern:** $x^{2} + 9x = x \cdot (x + 9)$
2. **Umformen in eine binomische Formel:** $x^{2} + 6x + 9 = (x + 3)^{2}$
3. **Linearfaktorzerlegung:** $x^{2} - 2x - 8 = (x + 2) \cdot (x - 4)$

1. Faktorisieren durch Ausklammern

Beim Ausklammern suchst du nach einer **Zahl** oder einer **Variablen**, die in jedem Teil (Summanden) des Terms vorkommt. Diesen gemeinsamen Faktor kannst du wegen des Distributivgesetzes vor die Klammer ziehen.

$6a^{2} + 6b = 6 \cdot (a^{2} + b)$

In beiden Summanden $6a^{2}$ und $6b$ steckt die **6**. Du setzt eine Klammer und ziehst die **6** als **Faktor** vor die Klammer.

Beispiele

Beispiel 1 - Zahl ausklammern

$13a^{2} + 13 = 13 \cdot (a^{2} + 1)$

Kannst du einen Summanden komplett vor die Klammer ziehen, dann bleibt in der Klammer eine **1** als Platzhalter stehen.

Beispiel 2 - Teil einer Zahl ausklammern (Primfaktorzerlegung)

Zerlege die Zahlen zuerst in Primfaktoren:

$12x^{2} + 8y = 4 \cdot 3 \cdot x^{2} + 4 \cdot 2 \cdot y$

In beiden Teilen steckt eine **4**, die du ausklammerst:

$4 \cdot 3x^{2} + 4 \cdot 2y = 4 \cdot (3x^{2} + 2y)$

Beispiel 3 - Variable ausklammern

$13a + 7ab = a \cdot (13 + 7b)$

Eine Variable (hier a) ziehst du genauso vor die Klammer wie eine Zahl.

Beispiel 4 - Zahl und Variable ausklammern

$13ac + 13ab = 13a \cdot (c + b)$

Auch eine Kombination aus Zahl und Variable (hier $13a$) lässt sich ausklammern. Wenn du unsicher bist, klammere einen Teil nach dem anderen aus.

Beispiel 5 - Potenzen ausklammern

$13a^{3} + 7a^{2} = a^{2} \cdot (13a + 7)$

Bei Potenzen klammerst du immer die **niedrigere Hochzahl** aus (hier a^{2}, weil a^{2} und a^{3} vorkommen).

Beispiel 6 - Teilweise faktorisieren

$2ax + 2ab - 3by - 3b = 2a(x + b) - 3b(y + 1)$

Hier teilst du den Term in zwei kleinere Terme auf und faktorisierst beide einzeln.

Beispiel 7 - Mehrfaches Faktorisieren

Klammere aus den ersten beiden Teilen $2a$ und aus den letzten beiden $3b$ aus:

$2ax + 10a - 3bx - 15b = 2a(x + 5) - 3b(x + 5)$

Jetzt steht in beiden Teilen die Klammer $(x + 5)$. Diese klammerst du ebenfalls aus:

$2a(x + 5) - 3b(x + 5) = (2a - 3b) \cdot (x + 5)$

2. Faktorisieren mit binomischen Formeln

Binomische Formeln kannst du auch **rückwärts** anwenden und damit Klammern erzeugen. Du gehst dabei immer gleich vor:

1. Basis a und b aus a^{2} und b^{2} bestimmen
2. prüfen, ob der Mittelterm $2ab$ vorhanden ist
3. binomische Formel aufstellen

Beispiel 1 - Erste binomische Formel

Die erste binomische Formel $(a + b)^{2} = a^{2} + 2ab + b^{2}$ nutzt du, wenn das erste Rechenzeichen ein **+** ist.

$x^{2} + 8x + 16$

- **Basis:** $a^{2} = x^{2}$, also $a = x$, und $b^{2} = 16$, also $b = 4$
- **Mittelterm:** $2ab = 2 \cdot x \cdot 4 = 8x$ ist vorhanden.

- **Ergebnis:** $x^{2} + 8x + 16 = (x + 4)^{2}$

Beispiel 2 - Zweite binomische Formel

Die zweite binomische Formel $(a - b)^{2} = a^{2} - 2ab + b^{2}$ nutzt du, wenn das erste Rechenzeichen ein **-** ist.

$x^{2} - 6x + 9$

- **Basis:** $a = x$ und $b = 3$ (denn $9 = 3 \cdot 3$)
- **Mittelterm:** $2ab = 2 \cdot 3 \cdot x = 6x$ ist vorhanden.
- **Ergebnis:** $x^{2} - 6x + 9 = (x - 3)^{2}$

Beispiel 3 - Dritte binomische Formel

Die dritte binomische Formel $(a + b)(a - b) = a^{2} - b^{2}$ nutzt du, wenn der Term nur **zwei Teile** hat und Ausklammern nicht möglich ist.

$x^{2} - 25$

- **Basis:** $a = x$ und $b = 5$ (denn $25 = 5 \cdot 5$)
- Einen Mittelterm $2ab$ gibt es hier nicht.
- **Ergebnis:** $x^{2} - 25 = (x + 5)(x - 5)$

3. Faktorisieren mit der Linearfaktorzerlegung

Mit der Linearfaktorzerlegung faktorisierst du ein Polynom - also einen Term, in dem x vorkommt, z.B. $x^{2} - 3x + 5$. Dabei berechnest du die Nullstellen und schreibst das Polynom als Produkt seiner Linearfaktoren. Wie das genau funktioniert, steht auf der Theorieseite **Linearfaktorzerlegung**.

Übungen

Faktorisiere die folgenden Terme. Die Lösungen findest du darunter.

1. $12x + 2y + 10$
2. $24x + 12xy + 6x$
3. $4x^{2} - 20xy + 25y^{2}$
4. $3x^{4}y^{3} + 13x^{6}y^{4} + 11x^{5}y^{2}z^{2}$
5. $9x^{2} - 25y^{2}$

Lösungen

1. Zahl ausklammern: $12x + 2y + 10 = 2(6x + y + 5)$
2. Zahl und Variable ausklammern: $24x + 12xy + 6x = 6x(4 + 2y + 1)$

3. zweite binomische Formel: $4x^{2} - 20xy + 25y^{2} = (2x - 5y)^{2}$
4. Potenzen ausklammern: $3x^{4}y^{3} + 13x^{6}y^{4} + 11x^{5}y^{2}z^{2} = x^{4}y^{2}(3y + 13x^{2}y^{2} + 11xz^{2})$
5. dritte binomische Formel: $9x^{2} - 25y^{2} = (3x + 5y)(3x - 5y)$

Merke

- Prüfe **zuerst**, ob alle Summanden einen gemeinsamen Faktor haben - dann klammere ihn aus.
- Eine binomische Formel passt direkt, wenn der Term **drei Teile** hat, aussen zwei Quadrate stehen und der Mittelterm $2ab$ ist.
- **Kontrolle:** Multipliziere dein Ergebnis wieder aus - es muss der Ausgangsterm entstehen. Achte dabei besonders auf die Vorzeichen.

Quelle und weitere Beispiele: Studyflix - Faktorisieren