Linearfaktorzerlegung

Mit der **Linearfaktorzerlegung** stellst du ein Polynom durch seine **Linearfaktoren** dar. Aus dieser Produktform kannst du die **Nullstellen** direkt ablesen.

Grundidee

Bei der Linearfaktorzerlegung bringst du ein Polynom von der **Normalform**

$f(x) = a_{n}x^{n} + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_{0}$

in die **Produktform** (Linearfaktordarstellung)

$f(x) = a \cdot (x - x_{1})(x - x_{2}) \dots (x - x_{n})$

Jede Klammer der Form (x - Nullstelle) ist ein **Linearfaktor**. Die Zahlen $x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n}$ sind die **Nullstellen** des Polynoms, a ist der **Vorfaktor**.

Beispiele

- $6x^{2} - 12x - 18 = 6 \cdot (x + 1)(x - 3)$
- $x^{2} + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$
- $x^{2} - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$

Hat eine Funktion keine Nullstellen, kann sie nicht weiter in Linearfaktoren zerlegt werden.

Vorgehensweise

1. **Vorfaktor ausklammern** (Zahl vor der höchsten Potenz)
2. **Nullstellen berechnen**
3. **Linearfaktoren aufstellen** - für jede Nullstelle eine Klammer (x - Nullstelle)
4. **Linearfaktoren in die Produktform bringen** (mit dem Vorfaktor)
5. **Probe durch Ausmultiplizieren**

Die Nullstellen berechnest du je nach Aufgabe mit der Mitternachtsformel, der pq-Formel oder der abc-Formel.

Beispiel: Polynom 2. Grades

$f(x) = x^{2} + 4x + 3$

Schritt 1 - Vorfaktor ausklammern: Der Vorfaktor von x^{2} ist 1, du musst nichts ausklammern.

Schritt 2 - Nullstellen berechnen: Setze $f(x) = 0$ und löse, hier mit der Mitternachtsformel:

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^{2} - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$

Die Nullstellen liegen bei $x_{1} = -1$ und $x_{2} = -3$.

Schritt 3 - Linearfaktoren aufstellen:

$x_{1} = -1$ → $(x - (-1)) = (x + 1)$

$x_{2} = -3$ → $(x - (-3)) = (x + 3)$

Schritt 4 - Produktform:

$f(x) = (x + 1)(x + 3)$

Schritt 5 - Probe durch Ausmultiplizieren:

$f(x) = (x + 1)(x + 3) = x^{2} + 3x + x + 3 = x^{2} + 4x + 3$ ✓

Beispiel: mit Vorfaktor

$f(x) = 2x^{2} + 3x + 1$

Schritt 1 - Vorfaktor ausklammern: Den Vorfaktor 2 klammerst du aus und merkst ihn dir für später:

$f(x) = 2 \cdot (x^{2} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2})$

Schritt 2 - Nullstellen berechnen: Mitternachtsformel auf den Term in der Klammer anwenden:

$x_{1,2} = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{3}{2})^{2} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}}{2 \cdot 1}$

$x_{1} = -0{,}5$ und $x_{2} = -1$

Schritt 3 - Linearfaktoren aufstellen:

$x_{1} = -0{,}5$ → $(x + 0{,}5)$

$x_{2} = -1$ → $(x + 1)$

Schritt 4 - Produktform (mit dem Vorfaktor 2):

$f(x) = 2 \cdot (x + 0{,}5)(x + 1)$

Schritt 5 - Probe durch Ausmultiplizieren:

$2(x + 0{,}5)(x + 1) = (2x + 1)(x + 1) = 2x^{2} + 2x + x + 1 = 2x^{2} + 3x + 1$ ✓

Polynome höheren Grades

Bei Funktionen mit Grad höher als 2 findest du die Nullstellen mit anderen Methoden:

- Durch **Ausklammern** von x kannst du oft den Grad des Restpolynoms verringern.
- Durch **Raten / Ausprobieren** findest du häufig eine erste Nullstelle. Bei ganzzahligen Koeffizienten sind die Teiler des konstanten Glieds gute Kandidaten.

Beispiel: Linearfaktorzerlegung mit Ausklammern

Enthält jeder Summand die Variable x, kannst du x ausklammern und erhältst wieder eine quadratische Funktion.

$f(x) = x^{3} - 6x^{2} + 5x$

$f(x) = x \cdot (x^{2} - 6x + 5) = 0$

Schritt 1 - Vorfaktor ausklammern: Der Vorfaktor von x^{3} ist 1.

Schritt 2 - Nullstellen berechnen: Da das Produkt 0 sein soll, setzt du die Faktoren einzeln gleich 0:

$x_{1} = 0$

$x^{2} - 6x + 5 = 0$ → $x_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^{2} - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$ → $x_{2} = 5$ und $x_{3} = 1$

Schritt 3 - Linearfaktoren aufstellen:

$x_{1} = 0$ → $(x - 0) = x$

$x_{2} = 5$ → $(x - 5)$

$x_{3} = 1$ → $(x - 1)$

Schritt 4 - Produktform:

$f(x) = x(x - 5)(x - 1)$

Schritt 5 - Probe durch Ausmultiplizieren:

$f(x) = (x^{2} - 5x)(x - 1) = x^{3} - x^{2} - 5x^{2} + 5x = x^{3} - 6x^{2} + 5x$ ✓

Anwendung: Brüche kürzen

Die Linearfaktorzerlegung hilft beim Kürzen von Brüchen aus Polynomen (gebrochenrationale Terme). Du zerlegst Zähler und Nenner jeweils in Linearfaktoren und kürzt gleiche Faktoren.

$g(x) = \frac{3x^{2} + 10x + 8}{2x^{2} - 4x - 16}$

Mit der Mitternachtsformel erhältst du im Zähler die Nullstellen -2 und $-\frac{4}{3}$, im Nenner 4 und -2:

$g(x) = \frac{3(x + 2)(x + \frac{4}{3})}{2(x - 4)(x + 2)}$

Da der Faktor $(x + 2)$ im Zähler und im Nenner steht, kannst du ihn kürzen:

$g(x) = \frac{3(x + \frac{4}{3})}{2(x - 4)}$

Merke

- Aus einer Nullstelle $x_{0} = -3$ wird der Linearfaktor $(x - (-3)) = (x + 3)$ - **nicht** $(x - 3)$.
- Den **Vorfaktor** der Normalform darfst du in der Produktform nicht vergessen.
- **Kontrolle** immer durch Ausmultiplizieren: Es muss das ursprüngliche Polynom entstehen.

Quelle und weitere Beispiele: Studyflix - Linearfaktorzerlegung