

Linearfaktorzerlegung

Mit der **Linearfaktorzerlegung** stellst du ein Polynom durch seine **Linearfaktoren** dar. Aus dieser Produktform kannst du die **Nullstellen** direkt ablesen.

Grundidee

Bei der Linearfaktorzerlegung bringst du ein Polynom von der **Normalform**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

in die **Produktform** (Linearfaktordarstellung)

$$f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Jede Klammer der Form $(x - \text{Nullstelle})$ ist ein **Linearfaktor**. Die Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n sind die **Nullstellen** des Polynoms, a ist der **Vorfaktor**.

Beispiele

- $6x^2 - 12x - 18 = 6 \cdot (x + 1)(x - 3)$
- $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$
- $x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$



Hat eine Funktion keine Nullstellen, kann sie nicht weiter in Linearfaktoren zerlegt werden.

Vorgehensweise

- Vorfaktor ausklammern** (Zahl vor der höchsten Potenz)
- Nullstellen berechnen**
- Linearfaktoren aufstellen** - für jede Nullstelle eine Klammer $(x - \text{Nullstelle})$
- Linearfaktoren in die Produktform bringen** (mit dem Vorfaktor)
- Probe durch Ausmultiplizieren**

Die Nullstellen berechnest du je nach Aufgabe mit der Mitternachtsformel, der pq-Formel oder der abc-Formel.

Beispiel: Polynom 2. Grades

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

Schritt 1 - Vorfaktor ausklammern: Der Vorfaktor von (x^2) ist 1, du musst nichts ausklammern.

Schritt 2 - Nullstellen berechnen: Setze $(f(x) = 0)$ und löse, hier mit der Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

Die Nullstellen liegen bei $(x_1 = -1)$ und $(x_2 = -3)$.

Schritt 3 - Linearfaktoren aufstellen:

$$(x_1 = -1) \rightarrow ((x - (-1)) = (x + 1))$$

$$(x_2 = -3) \rightarrow ((x - (-3)) = (x + 3))$$

Schritt 4 - Produktform:

$$f(x) = (x + 1)(x + 3)$$

Schritt 5 - Probe durch Ausmultiplizieren:

$$f(x) = (x + 1)(x + 3) = x^2 + 3x + x + 3 = x^2 + 4x + 3 \quad \checkmark$$

Beispiel: mit Vorfaktor

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

Schritt 1 - Vorfaktor ausklammern: Den Vorfaktor 2 klammerst du aus und merkst ihn dir für später:

$$f(x) = 2 \cdot (x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2})$$

Schritt 2 - Nullstellen berechnen: Mitternachtsformel auf den Term in der Klammer anwenden:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = -0{,}5 \quad \text{und} \quad x_2 = -1$$

Schritt 3 - Linearfaktoren aufstellen:

$$(x_1 = -0{,}5) \rightarrow ((x + 0{,}5))$$

$$(x_2 = -1) \rightarrow ((x + 1))$$

Schritt 4 - Produktform (mit dem Vorfaktor 2):

$$f(x) = 2 \cdot (x + 0{,}5)(x + 1)$$

Schritt 5 - Probe durch Ausmultiplizieren:

$$2(x + 0{,}5)(x + 1) = (2x + 1)(x + 1) = 2x^2 + 2x + x + 1 = 2x^2 + 3x + 1 \quad \checkmark$$

Polynome höheren Grades

Bei Funktionen mit Grad höher als 2 findest du die Nullstellen mit anderen Methoden:

- Durch **Ausklammern** von (x) kannst du oft den Grad des Restpolynoms verringern.
- Durch **Raten / Ausprobieren** findest du häufig eine erste Nullstelle. Bei ganzzahligen Koeffizienten sind die Teiler des konstanten Glieds gute Kandidaten.

Beispiel: Linearfaktorzerlegung mit Ausklammern

Enthält jeder Summand die Variable (x) , kannst du (x) ausklammern und erhältst wieder eine quadratische Funktion.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$$

$$f(x) = x \cdot (x^2 - 6x + 5) = 0$$

Schritt 1 - Vorfaktor ausklammern: Der Vorfaktor von (x^3) ist 1.

Schritt 2 - Nullstellen berechnen: Da das Produkt 0 sein soll, setzt du die Faktoren einzeln gleich 0:

$$x_1 = 0$$

$$(x^2 - 6x + 5 = 0) \rightarrow (x_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}) \rightarrow (x_2 = 5)$$

und $(x_3 = 1)$

Schritt 3 - Linearfaktoren aufstellen:

$$(x_1 = 0) \rightarrow ((x - 0) = x)$$

$$(x_2 = 5) \rightarrow ((x - 5))$$

$$(x_3 = 1) \rightarrow ((x - 1))$$

Schritt 4 - Produktform:

$$f(x) = x(x - 5)(x - 1)$$

Schritt 5 - Probe durch Ausmultiplizieren:

$$f(x) = (x^2 - 5x)(x - 1) = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x = x^3 - 6x^2 + 5x \quad \checkmark$$

Anwendung: Brüche kürzen

Die Linearfaktorzerlegung hilft beim Kürzen von Brüchen aus Polynomen (gebrochenrationale Terme). Du zerlegst Zähler und Nenner jeweils in Linearfaktoren und kürzt gleiche Faktoren.

$$g(x) = \frac{3x^2 + 10x + 8}{2x^2 - 4x - 16}$$

Mit der Mitternachtsformel erhältst du im Zähler die Nullstellen (-2) und $(-\frac{4}{3})$, im Nenner (4) und (-2) :

$$g(x) = \frac{3(x + 2)(x + \frac{4}{3})}{2(x - 4)(x + 2)}$$

Da der Faktor $(x + 2)$ im Zähler und im Nenner steht, kannst du ihn kürzen:

$$g(x) = \frac{3(x + \frac{4}{3})}{2(x - 4)}$$

Merke



- Aus einer Nullstelle $(x_0 = -3)$ wird der Linearfaktor $((x - (-3)) = (x + 3))$ - **nicht** $((x - 3))$.
- Den **Vorfaktor** der Normalform darfst du in der Produktform nicht vergessen.
- **Kontrolle** immer durch Ausmultiplizieren: Es muss das ursprüngliche Polynom entstehen.

Quelle und weitere Beispiele: [Studyflix - Linearfaktorzerlegung](#)

From: <https://wiki.bzz.ch/> - **BZZ - Modulwiki**

Permanent link: <https://wiki.bzz.ch/modul/mathe/max/thema/linearfaktorzerlegung?rev=1781517211>

Last update: **2026/06/15 11:53**

